محمود نصیری

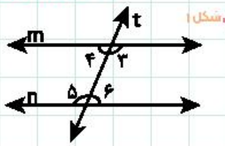
تفکر هندسی و مفهوم‌های هندسی

ویژگی‌های خط‌های موازی

در بخش قبلی در مورد موازی‌ها مطالبی را بررسی کردیم و تا حدودی از نظر تاریخی با اصل پنجم اقلیدس و جایگزین‌های آن آشنا شدیم. از اینجا به بعد ساختن هندسه را به‌طور رسمی‌تری شروع می‌کنیم. می‌کوشیم قضیه‌هایی را در مورد خط‌های موازی ثابت کنیم و سپس کاربردهایی از آن‌ها را بیان خواهیم کرد. ابتدا اصلی را که در بخش قبلی به‌عنوان اصل زاویه‌های متقابل پذیرفتیم، بیان می‌کنیم و بعد قضیه‌هایی را در کاربرد آن ثابت می‌کنیم. در تمام این قضیه‌ها و بعد از آن، همهٔ خط‌ها در صفحه درنظر گرفته می‌شوند.

اصل زاویه‌های متقابل:
خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگر این دو خط موازی باشند آنگاه دو زاویهٔ متقابل مکمل‌اند (شکل ۱).
اگر $m \parallel n$ و t هر دو را قطع کند، آنگاه داریم:

$m\angle ۳ + m\angle ۶ = ۱۸۰^\circ$
یا
$m\angle ۴ + m\angle ۵ = ۱۸۰^\circ$



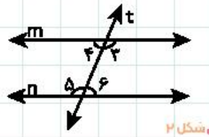
شکل ۱

اولین قضیه را ثابت می‌کنیم و اثبات قضیه‌های بعدی را به عهدهٔ شما می‌گذاریم.

قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی:
خطی دو خط متمایز را قطع کرده است. اگر این دو خط موازی باشند، آنگاه زاویه‌های متبادل داخلی هم‌نهشت هستند.

در شکل ۲، $m \parallel n$ و خط t این دو خط موازی را قطع کرده است. در این صورت داریم:

$\angle ۶ \cong \angle ۴$ و $\angle ۵ \cong \angle ۳$



شکل ۲

فکر می‌کنید چگونه از اصل زاویه‌های متقابل استفاده می‌کنیم؟

$m\angle ۳+m\angle ۶=۱۸۰^\circ$، چه رابطه‌ای بین $\angle ۳$ و $\angle ۴$ وجود دارد؟

قبلاً با «زاویه‌های مجانب» آشنا شده‌ایم. $\angle ۳$ و $\angle ۴$ دو زاویهٔ مجانب هستند. در نتیجه داریم:

$m\angle ۳+m\angle ۴=۱۸۰^\circ$

از این رابطه و رابطهٔ قبلی با توجه به ویژگی تساوی‌ها داریم:

$m\angle ۳+m\angle ۶=m\angle ۳+m\angle ۴$

اکنون به وسیلهٔ ویژگی کم کردن از تساوی‌ها داریم:

$m\angle ۶=m\angle ۴$

پس بنا بر تعریف هم‌نهشتی دو زاویه:

$\angle ۴\cong\angle ۶$

به همین ترتیب: $\angle ۵\cong\angle ۳$.

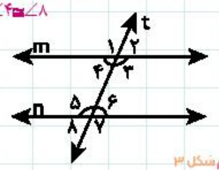
آنچه که در بالا نشان دادیم، در واقع یک اثبات دقیق ریاضی است. مشاهده می‌کنید که چگونه از یک اصل و ویژگی زاویه‌های مجانب و ویژگی تساوی‌ها توانستیم این اثبات را کامل کنیم.

با توجه به اثبات بالا سعی کنید دو قضیهٔ زاویه‌های متناظر و زاویه‌های متبادل خارجی را که بسیار مشابه قضیهٔ قبلی هستند، ثابت کنید.

قضیهٔ زاویه‌های متناظر: خطی دو خط را قطع کرده است. اگر این دو خط موازی باشند، آنگاه زاویه‌های متناظر هم‌نهشت‌اند.

یعنی اگر: $m\|n$ و t این دو خط را قطع کند، آنگاه داریم:

$\angle ۱\cong\angle ۵$، $\angle ۲\cong\angle ۶$، $\angle ۳\cong\angle ۷$، $\angle ۴\cong\angle ۸$



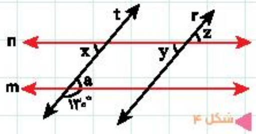
شکل ۳

قضیهٔ زاویه‌های متبادل خارجی: خط t دو خط m و n را قطع کرده است. اگر: $m\|n$، آنگاه: $\angle ۷\cong\angle ۱$ و $\angle ۸\cong\angle ۲$.

با توجه به قضیه‌هایی که بیان کردیم، می‌توانیم مسئله‌های متفاوتی را حل کنیم.

مثال: در شکل ۴ داریم: $n\|m$ و $t\|r$.

با توجه به اندازهٔ زاویه‌ای که داده شده و برابر ۱۳۰° است، z را پیدا کنید.



شکل ۴

پاسخ: با استفاده از ویژگی زاویه‌های مجانب:

$a-۱۸۰^\circ\ ۱۳۰^\circ=۵۰^\circ$

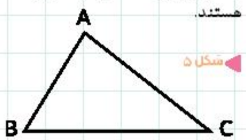
با توجه به قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی: $x-a-۵۰^\circ$.

به همین ترتیب، با توجه به قضیهٔ زاویه‌های متناظر: $y-۵۰^\circ$. و بالاخره، از زاویه‌های متقابل به رأس نتیجه می‌گیریم که: $z-۵۰^\circ$.

یکی از کاربردهای قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی، اثبات مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث است. در سال‌های قبل با مثلث آشنا شده‌اید. ابتدا تعریف رسمی مثلث را بیان می‌کنیم.

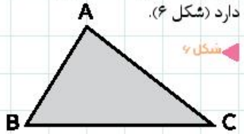
تعریف: اگر A، B و C سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط باشند، آنگاه مجموعه نقطه‌های سه پاره‌خط AB، AC و BC را یک مثلث می‌نامیم و آن را به‌صورت ΔABC نشان می‌دهیم.

سه نقطهٔ A، B و C را سه رأس مثلث و هر یک از پاره‌خط‌های AB، AC و BC را ضلع‌های مثلث می‌نامیم (شکل ۵). هر یک از زاویه‌های ABC، ACB و BAC را زاویه‌های مثلث می‌نامند. در واقع، هر یک از این زاویه‌ها شامل دو ضلع از مثلث هستند.



شکل ۵

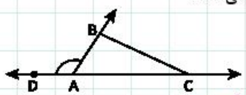
قبلاً «درون زاویه» را تعریف کردیم. به کمک آن می‌توانیم «درون مثلث» را نیز تعریف کنیم. در واقع قسمت مشترک درون زاویه‌های مثلث، درون مثلث نام دارد (شکل ۶).



شکل ۶

توجه داشته باشیم که درون مثلث با خود مثلث متفاوت است. وقتی می‌گوییم نقطهٔ M روی یک مثلث است، به این معنی است که نقطهٔ M روی یکی از سه ضلع مثلث واقع است.

معمولاً زاویه‌های هر مثلث را با حرف‌های سه رأس نیز نشان می‌دهند. مثلاً در شکل ۷ منظور از $\angle A$ همان $\angle BAC$ است که آن را «زاویهٔ درونی مثلث» نیز می‌نامند.



شکل ۷

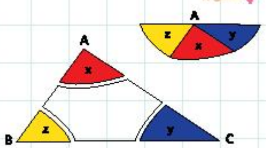
همچنین، $\angle BAD$ را یک زاویهٔ بیرونی یا خارجی نظیر رأس A از مثلث می‌نامند. هر زاویهٔ خارجی و داخلی نظیر یک رأس، دو زاویهٔ مجانب هستند.

قضیهٔ زیر در مورد مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر مثلث برقرار است:

قضیه: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی برابر ۱۸۰° است.

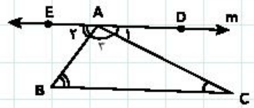
در دورهٔ ابتدایی به‌طور غیررسمی مشاهده کردید که اگر مطابق شکل ۸، یک مثلث را روی یک صفحه کاغذ بکشید و سه تکهٔ آن را ببرید و کنار هم بگذارید، یک زاویهٔ «نیم‌صفحه» پدید می‌آید. یعنی مجموع اندازهٔ زاویه‌ها برابر ۱۸۰° است.

شکل ۸



اما قرار ما این است که تا حد امکان گام‌به‌گام وارد اثبات‌های رسمی شویم. بنابراین، در اینجا به کمک قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی آن را ثابت می‌کنیم. مهم‌ترین موضوع در ریاضی این است که هر چه را ادعا می‌کنیم، باید ثابت کنیم. یعنی باید توضیح‌های متقاعدکننده‌ای برای درستی گزاره‌ها بیان کنیم. بحث در مورد اثبات مفصل است و در حال حاضر نمی‌توانیم به‌طور کامل وارد آن شویم. فقط تا این اندازه می‌توانیم توضیح دهیم که به کاربردن فرض‌ها، قضیه‌های قبلی، تعریف‌ها و اصل‌ها، گام‌های اساسی اثبات هستند. در واقع هر چه را که بیان می‌کنیم، باید بر پایهٔ یکی از این گام‌ها باشد. قبلاً چند اثبات را بیان کرده‌ایم. در اینجا می‌خواهیم اثباتی برای مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث بیان کنیم. در هر گام هر چه را که به کار می‌بریم، توضیح خواهیم داد. اثبات در هندسه با جبر کمی متفاوت است، زیرا در هندسهٔ مقدماتی به‌خوبی می‌توانیم از شکل‌ها استفاده کنیم. البته در اساس اثبات نباید به شکل متکی باشد، اما چون ما در گام‌های اولیهٔ اثبات هستیم، سعی می‌کنیم اثبات‌ها را با شکل‌ها نیز توضیح دهیم. یکی از ویژگی‌های اثبات در هندسه، رسم شکل‌های اضافی است. شاید این یکی از دشواری‌های اثبات‌های هندسی است که چرا و چگونه باید شکل‌های اضافی را رسم کنیم. معمولاً این شکل‌های اضافی شامل رسم خط‌ها، پاره‌خط‌ها، ساختن زاویه‌ها و به‌طور کلی هر شکل هندسی می‌تواند باشد. رسم شکل اضافی در ذات حل مسئله‌های هندسه است و به تسلط، تمرین و حتی شاید دلیل‌های منطقی نیاز داشته باشد. وقتی شما یک ناحیهٔ مثلثی را مانند آنچه در شکل ۸ نشان دادیم، می‌برید، کنار هم قرار می‌دهید و یک زاویهٔ نیم‌صفحه می‌سازید، با کمی تفکر به این نتیجه می‌رسید که چگونه زاویه‌هایی هم‌نهشت با زاویه‌های مثلث در یک رأس مثلث بسازیم. اینجاست که اولین گام در اثبات این قضیه به ذهن می‌رسد. از یک رأس مثلث، مثلاً رأس A، خط m را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم خط m که از A گذشته است، موازی خط BC باشد (شکل ۹). خط m همان شکل اضافی است که آن را «خط کمکی» نیز می‌گویند و راه اثبات قضیه را برای ما هموار می‌کند.

شکل ۹



اکنون در ادامه، هر یک از بیان‌ها یا گزاره‌ها را با دلیل یا استدلال آن مشاهده می‌کنید:

۱. از رأس A خط $m = \overleftrightarrow{ED}$ را موازی $\overline{BC}$ رسم می‌کنیم.
دلیل: اصل توازی (اصل پلی فر)

۲. $\angle C \cong \angle ۱$ و $\angle B \cong \angle ۲$.
دلیل: قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی

۳. $m\angle ۱ = m\angle C$ و $m\angle ۲ = m\angle B$.
دلیل: تعریف هم‌نهشتی، دو زاویه (هم‌اندازه‌اند).

۴. $m\angle EAC + m\angle ۱ = ۱۸۰^\circ$.
دلیل: ویژگی زاویه‌های مجانب و مکمل.

۵. $m\angle EAC = m\angle ۲ + m\angle ۳$.
دلیل: ویژگی جمع زاویه‌ها.

۶. از (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم:
$m\angle ۲ + m\angle ۳ + m\angle ۱ = ۱۸۰^\circ$
دلیل: ویژگی جایگذاری.

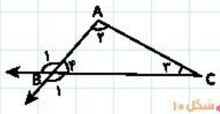
۷. از (۳) و (۶) نتیجه می‌گیریم:
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = ۱۸۰^\circ$
دلیل: ویژگی جایگذاری.

در اینجا یک نمونه استدلال کامل را مشاهده می‌کنید. هر چند که وقتی شما با استدلال‌ها بیشتر آشنا شدید، ممکن است از بعضی گام‌ها صرف‌نظر و اثبات را کوتاه‌تر بیان کنید.
اولین نتیجه‌ای که از این اثبات گرفته می‌شود، قضیهٔ اندازهٔ زاویهٔ خارجی در مثلث است.
با «زاویهٔ بیرونی» در مثلث آشنا شدیم:
هر زاویه را که با یک زاویهٔ مثلث تشکیل دو زاویهٔ مجانب دهد، زاویهٔ بیرونی نظیر آن زاویهٔ مثلث می‌نامیم.

به عبارت دیگر، هر زاویه را که رأس آن رأس مثلث و یک ضلع آن شامل یک ضلع مثلث و ضلع دیگر آن امتداد ضلع مجاور آن از طرفی باشد که شامل خود آن ضلع نباشد، زاویهٔ بیرونی آن مثلث می‌گویند. برای هر زاویهٔ بیرونی، دو زاویهٔ درونی دیگر مثلث را که مجاور آن نباشند، دو زاویهٔ درونی غیرمجاور می‌نامند. نتیجهٔ زیر رابطهٔ بین اندازهٔ هر زاویه خارجی و دو زاویهٔ غیرمجاور آن را بیان می‌کند:

نتیجه: در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ بیرونی برابر مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ درونی غیرمجاور آن است.

در شکل ۱۰ داریم: $m\angle ۱ = m\angle ۲ + m\angle ۳$
با توجه به مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث اثبات آن ساده است:



شکل ۱۰

$m\angle ۱ = ۱۸۰^\circ - m\angle ۴$
$= ۱۸۰^\circ - (۱۸۰^\circ - m\angle ۲ - m\angle ۳)$
$= m\angle ۲ + m\angle ۳$

توجه داشته باشیم که در هر رأس مثلث، دو زاویهٔ بیرونی نظیر هر رأس وجود دارند که متقابل به رأس هستند، اما ما همواره یکی از آن‌ها را در نظر می‌گیریم. مثلاً وقتی در مورد مجموع اندازه‌های زاویه‌های بیرونی مثلث بحث می‌کنیم، در هر رأس فقط یک زاویه مورد نظر است.

تذکر مهم: هر چه را که در نتیجهٔ قبلی ثابت کردیم، واضح است که یکی از نتیجه‌های «اصل توازی» است. زیرا از مجموع اندازه‌های درونی هر مثلث که برابر ۱۸۰° است، استفاده کرده‌ایم. از این نتیجه یک نتیجهٔ مهم دیگر گرفته می‌شود که از خود آن مهم‌تر است و در حل قضیه‌ها و مسئله‌ها کاربرد بیشتری دارد. این قضیه به «قضیهٔ زاویهٔ بیرونی» معروف است.

در شکل ۱۰، در ΔABC داریم:
$m\angle ۱ = m\angle ۲ + m\angle ۳$

اما بنابر ویژگی تساوی‌ها:

$m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3 > m\angle 2$
و
$m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3 > m\angle 3$

یعنی: $m\angle 1 > m\angle 2$ و $m\angle 1 > m\angle 3$.
بنابراین قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ زاویهٔ بیرونی:

در هر مثلث، هر زاویهٔ بیرونی از هر زاویهٔ درونی غیرمجاور آن بزرگ‌تر است.

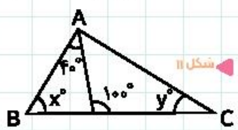
تذکر مهم: در ساختن هندسه به روش دقیق‌تر یا به‌عبارت دیگر اصولی‌تر، قضیهٔ زاویهٔ بیرونی مستقل از اصل توازی است. یعنی بدون استفاده از مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث که 180° است، می‌توانیم آن را ثابت کنیم. البته به مقدمه‌های بیشتری نیاز دارد و باید از قضیه‌های تساوی‌ها در مثلث استفاده کرد. در دوره‌های تحصیلی پایین‌تر، معمولاً به همین روش بالا این قضیه‌ها بررسی می‌شوند. کاربرد قضیهٔ زاویهٔ بیرونی را در اثبات عکس قضیهٔ زاویه‌های متبادل داخلی در شمارهٔ بعدی مشاهده خواهید کرد.

فعالیت: با استفاده از مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی و نتیجه‌ای که از آن در مورد اندازهٔ زاویهٔ بیرونی ثابت کردیم، نشان دهید:

در هر مثلث، مجموع اندازه‌های زاویه‌های بیرونی برابر 360° است.

تمرین: در شکل ۱۲، $\triangle ABC$ در رأس A قائمه است. $\angle x$ و $\angle y$ را محاسبه کنید.

شکل ۱۱



مجموع اندازه‌های زاویه‌های مثلث و هندسه‌های اقلیدسی و غیر اقلیدسی

در داستان موازی‌ها، مشاهده کردید که سه نوع اصل توازی به سه نوع هندسه منجر شد.

هر گاه از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، فقط یک خط به موازات آن رسم شود، آن را «هندسهٔ اقلیدسی» نامیدیم. تمام قضیه‌هایی که در مورد خط‌های موازی ثابت کردیم، با استفاده از این اصل به اثبات رسیدند. به بیان بهتر، اگر این اصل را بپذیریم، می‌توانیم ثابت کنیم: مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° است.

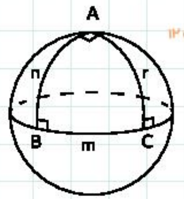
اما اگر این اصل را نپذیریم، خواهیم دید که مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث ممکن است کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از 180° باشد.

در قسمت‌های قبلی در مورد هندسه روی کره بحث‌های مختصری داشتیم. در این هندسه، خط‌ها را دایره‌های روی کره که مرکز آن‌ها مرکز کره باشد، در نظر گرفتیم. مشاهده کردیم که در این هندسه هیچ دو خط موازی وجود ندارد. بنابراین از هر نقطه غیرواقع بر یک خط، هیچ خطی به موازات آن نمی‌توان رسم کرد.

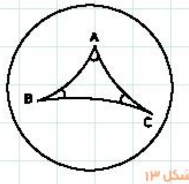
فرض کنید خط m روی کره همان خط استوا باشد. می‌توانیم دو خط n و r را از قطب شمال چنان رسم کنیم که زاویه‌های بین آن‌ها برابر 90° و هر کدام بر خط استوا نیز عمود باشند. در واقع می‌توانیم مثلثی رسم کنیم که مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی آن برابر 270° باشد. در اینجا قضیهٔ زاویهٔ خارجی نیز دیگر برقرار نیست. ممکن است اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی حتی کوچک‌تر یا برابر اندازهٔ هر زاویهٔ بیرونی غیرمجاور آن باشد. در شکل ۱۲ داریم:

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 3\times 90 = 270^\circ$ و
در دنیای واقعی چنین مثلثی وجود دارد.

شکل ۱۲



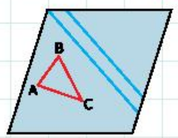
بنابراین، در هندسه‌ای که از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، هیچ خطی به موازات آن رسم نمی‌شود، مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی مثلث‌ها نیز از 180° بیشتر است. در نقطهٔ مقابل آن، بعداً با هندسهٔ دیگری آشنا خواهید شد که در آن، مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث کوچک‌تر یا مساوی 180° است. این همان هندسه‌ای است که در آن، از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک خط می‌توانیم بیش از یک خط به موازات آن رسم کنیم. در این مثلث به‌طور شهودی زاویه‌ها به درون کاستی دارند (شکل ۱۳).



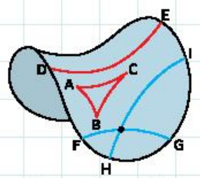
شکل ۱۳

روی یک زین اسب می‌توانیم چنین مثلثی را نمایش دهیم.
به‌طور مختصر مشاهده می‌کنید که داستان موازی‌ها چگونه در مثلث‌ها و در نتیجه سایر شکل‌های هندسه‌ها تأثیر دارند (شکل ۱۴) و این داستان هندسه‌ها، داستانی مفصل و شیرین است.

شکل ۱۴



$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$



$0^\circ < m\angle A + m\angle B + m\angle C < 180^\circ$

$180^\circ < m\angle A + m\angle B + m\angle C < 540^\circ$